

一般空間上の計算論的ランダムネス

宮部賢志

現在、ランダムな列を定義するのに3つのアプローチが知られている。一つ目は Martin-Löf により提唱された方法である。測度が 0 に近づく開集合の列をテストと呼び、計算可能なテストに含まれない列がランダムであると考えた。二つ目は Kolmogorov 複雑性により、三つ目はマルチンゲールにより定義される。Martin-Löf ランダムネスが自然なランダムネスであると考えられるようになった理由の一つは、1971 年に Schnorr が Martin-Löf ランダムネスについてこの3つの同値性を示したことによる。その後 2004 年前後には Schnorr ランダムネスや計算可能ランダムネスについても3つの同値性が示された。

Zvonkin と Levin は Martin-Löf の方法は一般の空間に自然に拡張できると提案し、Hertling と Weihrauch が計算可能な位相空間上でのランダムな元の定義を行った。一般の位相空間上で Kolmogorov 複雑性によるランダムネスを定義するには、計算可能な確率測度の理論を発展させる必要がある。Gács は計算可能な距離空間上でこの問題に取り組み、コンパクトな計算可能距離空間で Kolmogorov 複雑性による同値な定義を与えた。さらに Hoyrup と Rojas が一般の計算可能な距離空間上での Kolmogorov 複雑性による同値な定義を与えることに成功した。

本論文では以上の状況を一般の位相空間上にまで拡張した。位相空間の計算可能性については 2009 年の Weihrauch と Grubba による論文を基礎とした。

まず、一般の位相空間上の確率測度について考察した。計算可能な位相空間上の確率測度の空間は弱位相により位相空間となるが、自然に計算可能な位相空間となる。計算可能な確率測度をその位相空間の計算可能な元として定義し、自然な結果を導いた。

本論文ではテストによるランダムネスを測度ランダムネスと呼んだ。位相空間上の計算可能性の定義が改訂されているので再び定義を行った。そして測度ランダムネスはマルチンゲールによる特徴付けが行えることを示した。

次に複雑性ランダムネスを定義した。コントロール空間上の直接の一般化ではないが、自然と思える性質をいくつか示した。Hoyrup と Rojas の定義では特別な開基を指定しているのに対し、本論文の定義では計算可能同値な開基からは同じランダムネスが定義される。測度ランダムネスでは計算可能な測度でも万能なテストは存在しないかもしれないが、複雑性ランダムネスでは自然に本質的に万能な Kolmogorov 複雑性の存在が示される。また測度ランダムネス同様、ランダムな元の測度は 1 となる。計算可能な関数に関してある条件を満たせばランダムネスが保存されることも示した。さらに二つの条件下では測度ランダムネスと複雑性ランダムネスが同値になることも示した。この二つの条件は計算可能な距離空間では成立する条件である。

さらにそれぞれのランダムネスの相対化についても定義し、二つのランダムネスが同値となる時は、独立性定理が成り立つことを示した。独立性定理は自然なランダムネスかどうかの一つの基準と考えられている。測度ランダムネスと複雑性ランダムネスが同値になる時は少なくとも自然なランダムネスであることを示唆している。