独立性定理における無限個の互いに1ランダムな列への拡張

宮部賢志

マーティンレフランダムネス (Martin-Löf randomness) は計算可能性の観点から、2 進無限列におけるランダムな列を定義したものである。マーティンレフランダムな列はランダムな列として自然な性質を多く持つ。中でも哲学的、技術的、両面において重要なのが、1987 年に van Lambalgen が発見した独立性定理 (van Lambalgen's Theorem) である。この定理は以下の 2 つが同値であることを主張する。

- ある列がマーティンレフランダムである。
- ある列の偶数番目の列がマーティンレフランダムで、奇数番目の列が偶数番目の列から見てマーティンレフランダムである。

この主張は、ランダムな列の一部が他の部分の情報を持たないという直感にも一致する。この定理は有限個の分割に拡張でき、無限個の場合は一方向しか成立しないことが容易に分かる。

本論文の前半では、独立性定理の無限個への拡張が、最初の有限個を取り替えを許すことで成立することを示した。マーティンレフランダムネスはテスト、マシン、マルチンゲールによる同値な定義が知られている。独立性定理はテストの定義に基づいて証明されたが、本論文ではマルチンゲールによる定義を利用した。上記の定理を示すために、マルチンゲールの定義域を従来の 2 進有限文字列だけでなく部分文字列を許すように拡張した。また部分マルチンゲールに関して列の計算可能な入れ替えが可能なことを示した。更に saving property と呼ばれる性質が、部分マルチンゲールでは強い意味で成立することを示した。

本論文の後半ではオメガオペレーター (Ω operator) の値域の計算可能性に関して調べた。オメガオペレーターは各チューリングマシンに対して定義され、入力列に対しその列から見てマーティンレフランダムかつ左 c.e. の列を作る。入力列が停止集合 (空集合の 1 回ジャンプ) ならば、出力された列の計算可能性は高い (high と呼ばれるクラスに属する) のに対し、圧縮能力は低い (low for Ω) ことが知られていた。入力列の計算可能性が高くなるにしたがって、出力列の圧縮能力は低くなることは容易に分かる。出力列の計算可能性については次の結果を得た。

「入力列が空集合の n 回ジャンプならば、出力された列は high_n と呼ばれるクラスに属する。」

さらに、独立性定理の無限個への拡張定理を使って、次のような入力列が存在することを示した。

「すべての n に対してオメガオペレーターの出力列が high_n に属するようなチューリングマシンが存在する。」